

Medición de la velocidad de un balón

Pérez Castillo Camila (kml_prz@hotmail.com), Acosta Ailén (ailu_64@hotmail.com),
Aparicio María Jorgelina (jorapario@hotmail.com)

Física Experimental I, Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN.

Noviembre 2012.

Resumen

Se realizó la medición de la velocidad de un balón a la salida del cañón de una pistola de aire comprimido utilizando dos técnicas experimentales basadas en consideraciones cinemáticas y los principios de conservación, respectivamente.

Palabras clave

Péndulo balístico, velocidad media de un proyectil, choque plástico.

Introducción

En términos generales, interesa conocer la velocidad con la que un arma dispara un proyectil. Esto resulta de utilidad para caracterizar el desempeño del arma y de diferentes tipos de proyectiles.

Cuando un proyectil abandona el cañón del arma sufre un proceso de desaceleración debido al rozamiento con el aire, el cual depende de las características del proyectil. Las características del arma solo influyen para determinar la velocidad instantánea v del proyectil a la salida del cañón.

La determinación experimental de v se puede realizar a partir de consideraciones cinemáticas o recurriendo a los principios de conservación de la energía y el movimiento.

Desde un punto de vista cinemático la velocidad instantánea del proyectil es aproximadamente igual a la velocidad media v_m de la misma calculada entre dos puntos cercanos de su trayectoria, es decir:

$$v \approx v_m = \frac{d}{t} \quad (1)$$

donde d es la distancia recorrida por la partícula y t es el tiempo que tarda en recorrer la distancia d .

La velocidad de un proyectil también puede medirse utilizando un péndulo balístico (ver Figura 1). Éste dispositivo consta de un gran bloque de madera (aunque puede ser de otro material) de masa M (masa del péndulo), colgado de dos cuerdas de largo L . Se dispara una bala de masa m contra el bloque, la cual se incrusta plásticamente en el péndulo, depositando así toda su energía en el bloque. La combinación bloque más bala oscila, elevándose su centro de masa a una distancia vertical máxima o altura h antes de volver a caer [1].

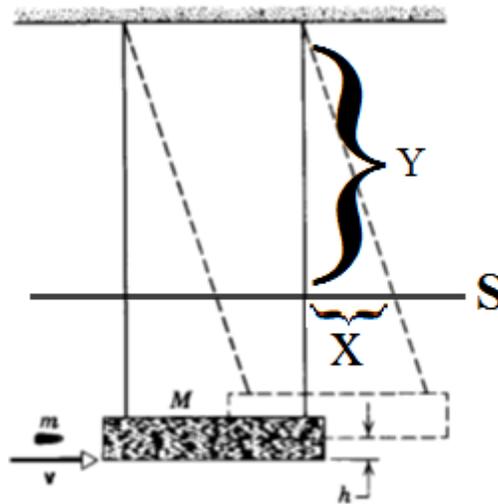


Figura 1: Esquema de un péndulo balístico. Como resultado del impacto la bala se incrusta en el péndulo y este alcanza su altura máxima h . También se indican los catetos X e Y del triángulo que se forma al desplazarse el péndulo.

Cuando la bala choca contra el bloque tenemos, por la conservación del movimiento en la dirección horizontal:

$$mv = (M + m)V \quad (2)$$

Donde v es la velocidad de la bala antes del impacto y V es la velocidad de la combinación bala más péndulo luego del impacto.

Aunque la energía mecánica ciertamente no se conserva durante el choque, sí puede asumirse que se conserva cuando el péndulo oscila después del impacto. La energía cinética del sistema inmediatamente después del choque es igual a la energía potencial del sistema cuando el bloque está en la parte superior del recorrido del péndulo, es decir:

$$\frac{1}{2}(M + m) V^2 = (M + m) g h \quad (3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad (se tomará $9,8\text{m/s}^2$ como su valor).

Eliminando a V entre las últimas dos ecuaciones llegamos a:

$$v = \frac{(M+m)}{m} \sqrt{2gh} \quad (4)$$

Por otro lado h puede calcularse como:

$$h = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

donde L es el largo del hilo del péndulo, y θ es su ángulo de apertura máxima.

Para el cálculo del $\cos \theta$ puede considerarse una línea paralela a la horizontal S (ver figura1), con lo cual:

$$\cos \theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (6)$$

Siendo Y la longitud del hilo medida desde su punto de sostén hasta S . Por otro lado, X la distancia horizontal que se mueve el péndulo sobre la línea S (ver figura1)

Por lo tanto, reemplazando (6) en (5):

$$h = L \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \quad (7)$$

Y reemplazando (7) en (4), queda como ecuación final para la velocidad del balín:

$$v = \frac{(M+m)}{m} \sqrt{2g L \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)} \quad (8)$$

En este trabajo, se midió la velocidad de un balín disparado por una pistola de aire comprimido, a través de los dos métodos. Estos se utilizaron simultáneamente, lo que permitió una mejor comparación de los resultados obtenidos

Procedimiento:

Se utilizó una pistola de aire comprimido con una energía nominal de disparo de 0,5 Joule, marca Airsoft Colt 25, la cual dispara balines plásticos esféricos de 0,4 cm de diámetro. Se fijó una base de madera al bastidor de una mesa de laboratorio y sobre la misma se montó todo el experimento. Se utilizó una prensa para sostener firmemente la pistola con respecto a la base (ver figura 2). Con el fin de determinar un valor promedio de la masa de los balines, se pesaron 22 de éstos con una balanza Sartorius modelo CP1245 (resolución de 0,1 mg). La masa promedio de los balines es de $m=(0,1259\pm 0,0004)$ g. En el Anexo al final del informe, Tabla 1, pueden encontrarse los resultados de cada medición y los criterios utilizados para el cálculo de la incertidumbre.



Figura 2: Fotografía del arreglo experimental.

Para la implementación del método cinemático se colocaron dos fotosensores marca Pasco modelo ME-9215A conectados a un cronómetro Pasco modelo ME-6810 (resolución de 0,0001 s). Se dispuso el primer fotosensor inmediatamente a la salida de la boca del cañón de la pistola y el otro a una distancia $d=8,6$ cm del primero. El cronómetro se utilizó en modo Gate. En este modo se activa el cronómetro cuando el primer fotosensor es interrumpido y se detiene cuando lo es el segundo. Esta distancia fue medida con una regla de resolución 0,1 cm, pero se estimó que d tiene una incertidumbre de 0,4cm debido a problemas para tomar el dato por la inaccesibilidad del instrumento al arreglo experimental, lo que introduce errores de paralaje y ortogonalidad del sistema.

Se estimó v mediante la ecuación (1).

Inmediatamente a continuación del segundo fotosensor se colocó el péndulo (ver figura 2)

Se utilizó como péndulo un cilindro hueco de plástico, de 1,5cm de diámetro y de 8,5cm de largo, el cual fue relleno con plastilina. Éste se pesó con una balanza OHAUS, modelo EB3 con una resolución de 0,1 g. Dando como resultado $M = 14,7\text{g}$. Se hicieron dos pequeños orificios en el cilindro a igual distancia de su borde. Se pasó un hilo inextensible por ambos orificios el cual se ató de manera muy firme debajo de una de las mesas de nuestro laboratorio. El largo del hilo era $L = 35,6\text{ cm}$ y se midió con una regla de resolución 0.1 cm, pero como era difícil acceder con el instrumento al arreglo experimental, ya que se midió cuando el mismo estaba montado, se estimó la incertidumbre del largo del hilo en 0,4 cm. Detrás del péndulo se montó una pantalla blanca en la cual se colocó una regla (de resolución 0,1 cm) horizontal a una distancia $Y = 30,8\text{ cm}$, la cual fue medida con una resolución de 0,1 cm, desde el punto de rotación del péndulo.

Con el fin de medir X en cada disparo se utilizó una cámara Kodak modelo C856, la cual registró mediante video el movimiento del hilo sobre la regla horizontal. Se realizaron unos disparos de prueba para determinar el lugar más adecuado para colocar la cámara. Este lugar permitió visualizar la región donde se observó que el péndulo alcanza a la altura máxima. Todo esto se realizó para evitar un significativo error de paralaje. Se analizaron las imágenes de los videos a través del programa VLC Media Player. Se observó cada fotograma y se determinó la distancia X a partir de la posición del hilo sobre la regla horizontal mencionada en el párrafo anterior, siendo ésta la mayor visualizada en los mismos. X fue medida con una resolución de 0,1 cm. Sin embargo, se estimó su incertidumbre en 0,4 cm para contemplar también la baja resolución de la imagen de la cámara y posibles problemas de paralaje. Ésta última incertidumbre debería ser determinada en una experiencia aparte, la cual está fuera del alcance de éste trabajo.

A partir de los valores de X, Y, m, M y L se determinó el valor de v mediante la ecuación (8) para cada disparo.

El procedimiento utilizado para cada disparo consistió en:

Se cargaba manualmente el sistema de aire comprimido accionando la corredera. Luego se colocaba un vástago, del mismo diámetro que los balines y, de 30cm de largo (aproximadamente) dentro del cañón de la pistola. Con esto se verificaba que el vástago interrumpiese ambos haces de luz de los fotosensores simultáneamente, y que el balón estuviese direccionado al centro de masa del péndulo. Se retiraba el vástago y se colocaba al péndulo en su punto de equilibrio. Se reseteaba el cronometro del fotosensor. Se iniciaba

la filmación con la cámara. Se realizaba el disparo. Se detenía la filmación y se tomaba nota de los datos obtenidos. Éste procedimiento se realizó 20 veces.

Resultados y análisis:

La velocidad medida según el método cinemático es de $v = (90 \pm 10) \text{ m/s}$. (ver tabla 2 y cálculo de incertidumbres en anexo).

La velocidad del balín según el péndulo balístico es $v = (82 \pm 8) \text{ m/s}$. (ver tabla 3 y cálculo de incertidumbres en anexo).

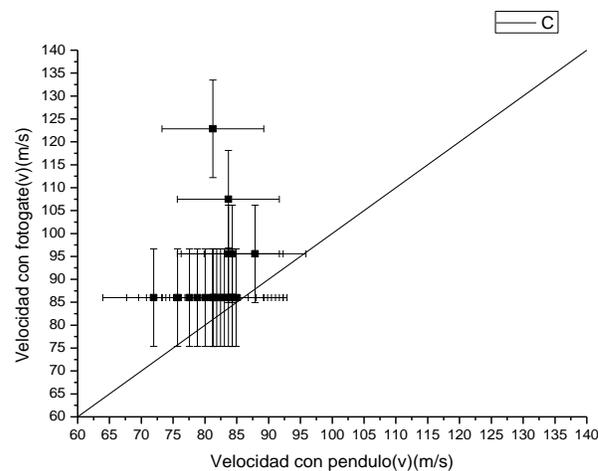


Figura 3: Gráfico de la velocidad del péndulo vs la velocidad del fotosensor.

En la figura 3 se muestra un gráfico donde el eje horizontal responde a la velocidad medida con el péndulo y el eje vertical a la velocidad medida con los fotosensores. La recta graficada corresponde a la velocidad del balín real, la cual debería dar igual para ambos métodos de medición. Los bastones de incertidumbre se estimaron a partir del cálculo de incertidumbres realizado en el Anexo.

También puede observarse que el 100% de los resultados obtenidos con el método del péndulo se encuentran entre los 63 m/s y 95 m/s. En cambio, con el método de los fotosensores, el 75% de los resultados da como valor de la velocidad 86 m/s, y el 25% de los valores da resultados entre los 95 m/s y 123 m/s.

La disposición de los puntos en la figura 3 a la izquierda de la recta puede justificarse debido a que la velocidad obtenida por el péndulo es menor a la velocidad obtenida por el

fotosensor ya que el péndulo está más alejado de la salida del balón. A su vez ambas velocidades medidas, son menores que la real ya que no están tomadas en el instante en el que el balón abandona el cañón.

En la figura 3 se observa claramente que los intervalos obtenidos por ambos métodos se solapan al estar cerca de la recta, lo cual indica que son mutuamente consistentes. Analizando los puntos obtenidos con el péndulo se ve que la variación de estos queda parcialmente comprendida por la incertidumbre instrumental, expresada gráficamente a través de los bastones de error en la figura 3, quedando todos los puntos dispuestos alrededor del valor promedio. Parte de esta desviación se debe a que al disparar el balón no pegó justo en el centro de masa del péndulo. Esto generó un movimiento rotacional, el cual no fue tenido en cuenta en las ecuaciones utilizadas para el modelo. La mayor incertidumbre de este experimento es la medición indirecta de h (ver demostración en Anexo). Con respecto al experimento de los fotosensores, la mayoría de los puntos dan un mismo valor, pero hay puntos que se alejan mucho de la moda. La mayor parte de la incertidumbre instrumental, de éste experimento, fue dada por el cronómetro de los fotosensores. A la dispersión de los puntos, el 25% que se aleja de la moda, no se le pudo encontrar explicación ya que supera ampliamente a la incertidumbre instrumental y no se sabe cuál puede ser la fuente de error. Se sabe que ésta dispersión no es debida a un eventual acercamiento entre los fotosensores (una reducción de d), ya que para que tome los valores mas alejados a la moda deben acercarse los fotosensores entre 0,9cm y 3,7cm entre sí, lo que se sabe con seguridad que no ocurrió (ver demostración1 en Anexo).

Una vez finalizada la experiencia se observaron los resultados y la metodología empleada. Entonces se plantearon las siguientes mejoras a realizar: Medir directamente h , en vez de obtenerla indirectamente a través de la medición de X e Y , para poder reducir el error instrumental. Utilizar una cámara de filmación con más fotogramas por segundo y una mejor resolución. Para el experimento de los foto sensores una mejora es conseguir un cronometro de mejor resolución (por lo menos una resolución de 1×10^{-5} s). Y además fijar los fotosensores a la base para evitar un eventual desplazamiento de los mismos en cada disparo. La segunda mejora no es necesaria si antes no se realiza la primera, ya que la mayor incertidumbre es introducida por t , como queda demostrado en el cálculo de incertidumbres (ver Anexo).

Una limitación encontrada en el método del fotosensor es que se calcula la velocidad instantánea del balón como la velocidad media de éste entre dos puntos, pero se sabe que la velocidad media es menor a la instantánea ya que en esa trayectoria se ve afectada por el rozamiento. En este trabajo no se evaluó cuantitativamente la desaceleración del balón debido a que debe realizarse otro tipo de experimento, el cual está afuera del alcance de nuestro trabajo.

Conclusión:

La velocidad inicial promedio del balón obtenida a partir del experimento de los foto sensores es de $v = (90 \pm 10)m/s$.

La velocidad inicial promedio del balón según el péndulo balístico es $v = (82 \pm 8)m/s$.

Ambos resultados son consistentes siendo el experimento del péndulo balístico apenas más preciso que el realizado con los fotosensores.

Referencias:

[1]. Resnick-Halliday-Krane. Física volumen 1. 5ta edición. Grupo editorial Patria. México, 2010.

Anexo:

Tabla1: Medición peso de los balines:

Nº de medición	$m(g) \pm 0,0004g$
1	0,1266
2	0,1269
3	0,1248
4	0,1268
5	0,1259
6	0,125
7	0,1259
8	0,1258
9	0,1256
10	0,1255
11	0,1258
12	0,1262
13	0,126
14	0,1253
15	0,127
16	0,125
17	0,125
18	0,1239
19	0,126
20	0,1263
21	0,128

22	0,1255
----	--------

Tabla 2: medición con foto sensores:

Nº medición	t (s) $\pm 0,0001s$	v (m/s) $\pm 8m/s$
1	0,001	86
2	0,001	86
3	0,001	86
4	0,0008	107,5
5	0,001	86
6	0,001	86
7	0,0009	95,555556
8	0,001	86
9	0,001	86
10	0,001	86
11	0,0007	122,85714
12	0,0009	95,555556
13	0,001	86
14	0,001	86
15	0,001	86
16	0,001	86
17	0,001	86
18	0,001	86
19	0,0009	95,555556
20	0,001	86

Tabla 3 medición con el péndulo balístico:

Nº medición	X (cm) $\pm 0,4cm$	v (m/s) $\pm 8m/s$
1	12,1	81,857
2	12,6	84,877
3	11,8	80,026
4	12,3	83,069
5	12,4	83,673
6	11,6	78,799
7	12,4	83,673
8	12,5	84,276

9	10,5	71,942
10	12,3	83,069
11	12	81,248
12	12,5	84,276
13	12,5	84,276
14	12	81,248
15	12	81,248
16	11,1	75,704
17	12,2	82,464
18	11,4	77,565
19	13,1	87,859
20	12	81,248

Demostración 1:

El 25% de los resultados de v obtenidos a partir del método de los fotosensores está entre 95,5 m/s y 123 m/s. Tomando $v = 123$ m/s y $t = 0,001$ s (suponiendo que t es igual que en el otro 75% de los resultados de la medición) y despejando d en (1), obtenemos que:

$$d' = v \times t$$

$$d' = 123 \text{ m/s} \times 0,001 \text{ s}$$

$$d' = 0,123 \text{ m} = 12,3 \text{ cm}$$

Siendo $d = 8,6$ cm entonces $\Delta d_1 = 3,7$ cm

Ahora tomaremos $v = 95,55$ m/s y $t = 0,001$ s

$$d'' = 95,55 \text{ m/s} \times 0,001 \text{ s}$$

$$d'' = 0,095 \text{ m} = 9,5 \text{ cm}$$

Siendo $d = 8,6$ cm, entonces $\Delta d_2 = 0,9$ cm

Cálculo de Incertidumbres:

La incertidumbre instrumental de la masa de los balines dada por los instrumentos es:

$$U_i (m) = 0,0001 \text{ g}$$

La desviación estándar muestral de la masa es:

$$S_{n-1}(m) = (8,84253 \times 10^{-4})\text{g}$$

La desviación estándar de la masa promedio es:

$$S_{n-1}(\bar{m}) = \frac{S_{n-1}(m)}{\sqrt{n}}$$

$$S_{n-1}(\bar{m}) = \frac{8,84253 \times 10^{-4}}{\sqrt{22}} \text{ g}$$

La incertidumbre estadística de la masa promedio es:

$$U_e(\bar{m}) = 2 * S_{n-1}(\bar{m}) = 2 \times \frac{8,84253 \times 10^{-4}}{\sqrt{22}} \text{ g}$$

$$U_e(\bar{m}) = 2 * S_{n-1}(\bar{m}) = 3,77047 \times 10^{-4} \text{ g}$$

$S_{n-1}(\bar{m})$ es multiplicado por 2 para que su confianza sea en el valor del 95%.

La incertidumbre total de la masa promedio es :

$$U_t(\bar{m}) = \sqrt{U_i(m)^2 + U_e(m)^2}$$

$$U_t(\bar{m}) = \sqrt{(0,0001\text{g})^2 + (3,77047 \times 10^{-4}\text{g})^2}$$

$$U_t(\bar{m}) = 3,90082 \times 10^{-4} \text{ g.}$$

Siendo n el número de mediciones.

La incertidumbre instrumental de la velocidad promedio medida con los fotosensores es:

$$U_i(\bar{v})_1 = \Delta v = \sqrt{\left| \frac{\partial v}{\partial d} \right|^2 \Delta d^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 \Delta t^2}$$

$$U_i(\bar{v})_1 = \Delta v = \sqrt{\left(\frac{1}{t} \right)^2 \Delta d^2 + \left(\frac{d}{t^2} \right)^2 \Delta t^2}$$

$$U_i(\bar{v})_1 = \Delta v = \sqrt{17,3611 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 87,07 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$U_i(\bar{v})_1 = \Delta v = 9,39 \text{ m/s}$$

.Como d y t son magnitudes dependientes el error Δv se obtuvo a partir de cada una de las mediciones, y se sacó el promedio de todos los errores (ver tabla 2).

La desviación estándar muestral de la velocidad medida con los fotosensores es:

$$S_{n-1}(\bar{v}) = 9,5016 \text{ m/s}$$

$$S_{n-1}(\bar{v}) = \frac{S_{n-1}(v)}{\sqrt{20}}$$

La incertidumbre estadística de la velocidad promedio medida con los fotosensores es:

$$U_e(\bar{v}) = 2 S_{n-1}(v) = 2 \frac{S_{n-1}(v)}{\sqrt{20}}$$

$$U_e(\bar{v}) = 2 S_{n-1}(v) = 4,2492 \text{ m/s}$$

$S_{n-1}(v)$ es multiplicado por 2 para que su confianza sea en el valor del 95%.

La incertidumbre total de la velocidad promedio medida con los fotosensores es:

$$U_t(\bar{v}) = \sqrt{U_i(v)^2 + U_e(v)^2}$$

$$U_t(\bar{v}) = \sqrt{(9,39 \text{ m/s})^2 + (4,2492 \text{ m/s})^2}$$

$$U_t(\bar{v}) = 10,30 \text{ m/s}$$

Entonces el valor final de la medición queda expresado como: $v = (90 \pm 10) \text{ m/s}$

La incertidumbre instrumental de la velocidad promedio medida con el péndulo es:

$$U_i(\bar{v}) = \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{2gL \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \left[\left(\frac{M}{m^2} \Delta m\right)^2 + \frac{\Delta M^2}{m} \right]} \\ & + \left(\frac{m+M}{m}\right)^2 \frac{g}{\sqrt{2L \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)}} \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)^2 (\Delta L)^2 \\ & + \frac{gL}{2 \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)} \frac{X^4}{(X^2 + Y^2)^3} (\Delta Y)^2 \\ & + \frac{gL}{2 \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)} \left[\frac{XY}{(\sqrt{(X^2 + Y^2)^3})} \right]^2 (\Delta X)^2 \end{aligned} \right\}^{1/2}$$

$$U_i(\bar{v}) = 8,009566493 \text{ m/s}$$

La desviación estándar muestral de la velocidad medida con el péndulo es:

$$S_{n-1}(v) = 3,5715 \text{ m/s}$$

La desviación estándar muestral de la velocidad promedio medida con el péndulo es:

$$S_{n-1}(\bar{v}) = \frac{S_{n-1}(v)}{\sqrt{n}}$$

$$S_{n-1}(\bar{v}) = 0,79 \text{ m/s}$$

La incertidumbre estadística de la velocidad promedio medida con el péndulo es:

$$U_e(\bar{v}) = 2 S_{n-1}(\bar{v}) = 2 \frac{S_{n-1}(v)}{\sqrt{n}}$$

$$U_e(\bar{v}) = 2 \times 0,79 \text{ m/s}$$

$$U_e(\bar{v}) = 1,597223 \text{ m/s}$$

Donde $S_{n-1}(\bar{v})$ está multiplicado por 2 para que su valor de confianza sea del 95%.

La incertidumbre total de la velocidad promedio medida con el péndulo es:

$$Ut(\bar{v}) = \sqrt{[Ui(v)]^2 + [Ue(v)]^2}$$

$$Ut(\bar{v}) = \sqrt{(8,009566493 \text{ m/s})^2 + (1,597223 \text{ m/s})^2}$$

$$Ut(\bar{v}) = 8,16726862 \text{ m/s}$$

Entonces el valor final de la medición queda expresado como $v = (82 \pm 8) \text{ m/s}$.

Determinación de la mayor incertidumbre en la medición de la velocidad con el método del péndulo.

$$v^2 = \underbrace{\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2}_{\text{A}} 2g l \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}}\right)}_{\text{B}}$$

Incertidumbre relativa del término A:

$$\frac{\Delta\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2} =$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2} = \frac{2\Delta\left(\frac{M}{m} + 1\right)}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2} = \frac{2\Delta\left(\frac{M}{m}\right)}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{M}{m} + 1\right)} \left(\frac{M}{m}\right) \left(\frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m}\right)$$

Reemplazando los valores en la expresión, da como resultado:

$$\frac{\Delta \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^z}{\left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2} = 0,01979$$

Incertidumbre relativa del término B:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}} \frac{\Delta \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}} \frac{1}{2} \frac{\Delta \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 - 1}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right)}} \frac{1}{2} \frac{\Delta \left(\frac{x}{y} \right)^2}{\left(\frac{x}{y} \right)^2 - 1}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\right)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\right)}} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1} \left[\frac{\Delta \left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2} \right]$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\right)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\right)}} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$$

Reemplazando los valores en la expresión, da como resultado:

$$\frac{\Delta h}{h} = 0,06331$$